KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *WEIBULL DETERIORATION* PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Matematika

Oleh :

NIDIA MINDIYARTI
11654203751

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI WEIBULL DETERIORATION PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

Oleh:

NIDIA MINDIYARTI
11654203751

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 18 Desember 2019

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI WEIBULL DETERIORATION PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

Oleh:

NIDIA MINDIYARTI
11654203751

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 18 Desember 2019

Pekanbaru, 18 Desember 2019
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Prodi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

KEMENTRIAN AGAMA
UIN SUSKA RIAU
FAKULTAS SAINS

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Ari Pani Desvina, M.Sc.**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Anggota I	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 18 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

Nidia Mindiyarti
11654203751

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Laa hawla wa laa quwwata illa billah

"Tiada daya dan upaya selain dengan kehendak Allah"

Maka nikmat Tuhan mu yang manakah yang kamu dustakan?

(QS. Ar-Rahman:13)

Alhamdulillahirabbilalamiin, puji syukur saya haturkan kepada Allah SWT., yang telah mengabulkan doa ibu saya di sepertiga malamnya untuk segala kebaikan bagi anaknya dan kemudahan dalam kuliah saya.

Tugas akhir ini kupersembahkan untuk kalian berdua, malaikat tak bersayapku, pelita di kegelapan, cahaya penghangat untukku dan nyawaku, Ayah dan Ibuku tersayang. Tanpa kalian aku bukan apa-apa. Terimakasih selalu ada ketika aku jatuh. Terimakasih telah terus mendukungku kala aku ingin rehat. Semoga dengan selesainya tugas akhir ini bisa menjadi kebahagiaan bagi kalian dan bisa membuat kalian bangga. Aamiin.

.

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI WEIBULL DETERIORATION PADA WAKTU BERHINGGA

NIDIA MINDIYARTI
11654203751

Tanggal Sidang : 18 Desember 2019
Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Kerusakan barang merupakan hal yang umum terjadi pada sistem persediaan. Barang-barang yang mudah rusak dapat mengakibatkan kerugian bagi perusahaan. Oleh karena itu, perlu adanya pengendalian terhadap persediaan yang dilakukan dengan penerapan teori kendali. Penelitian ini membahas penerapan teori kendali yang bertujuan untuk mendapatkan persamaan tingkat persediaan barang yang optimal dan mendapatkan kestabilan model matematika pada model kerusakan barang yang mengalami *Weibull Deterioration* pada waktu berhingga. Model persediaan barang yang digunakan adalah persamaan diferensial dinamik dimana fungsi permintaan diubah menjadi fungsi kuadrat dan fungsi kerusakan diubah menjadi *Weibull Deterioration*. Persamaan yang ada digunakan untuk mendapatkan fungsi Hamilton, fungsi Lagrange, solusi dari persamaan yang diselesaikan dengan dua kasus dan analisa kestabilan. Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa persamaan memenuhi semua syarat-syarat yang diperlukan untuk kondisi optimal. Selain itu, berdasarkan contoh yang telah diberikan didapat bahwa kurva menurun pada waktu yang telah ditentukan. Artinya, persamaan stabil asimtotik pada waktu yang telah ditentukan.

Kata kunci: *Kendali Optimal, Kestabilan, Penurunan Barang, Persediaan.*

OPTIMAL CONTROL ON THE INVENTORY MODEL OF THE WEIBULL DETERIORATION IN CHARGE TIME

NIDIA MINDIYARTI
11654203751

Date of Final Exam : December 18th 2019
Date of Graduation : 2020

Department of Mathematic
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Damage to goods is a common thing in the inventory system. Perishable goods can cause harm to the company. Therefore, inventory control is needed by applying control theory. This study discusses the application of control theory that aims to obtain an optimal equation of inventory levels and obtain stability of mathematical models on models of damage to goods that experience Weibull Deterioration at finite time. The inventory model used is a dynamic differential equation where the demand function is changed to a quadratic function and the damage function is changed to Weibull Deterioration. The equation is used to get the Hamilton function, the Lagrange function, the solution of the equation solved by two cases and the stability analysis. The results of the study show that the equation fulfills all the conditions needed for optimal conditions. In addition, based on the example given, it is found that the curve decreases at a predetermined time. That means, the asymptotic stable equation at a predetermined time.

Keywords: *Optimal Control, Stability, Decline in Goods, Inventory.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji dan syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wata'ala* yang telah memberikan rahmat, nikmat, kesempatan dan kesehatan sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat dan salam kita sampaikan kepada junjungan alam Nabi Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam* karena berkat perjuangan beliaulah kita umat manusia yang dibawa dari alam kegelapan ditujukan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana sains pada Jurusan Matematika. Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari orang tua tercinta, Ayah dan Ibu terbaik sedunia yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi dan doa yang membawa penulis sampai di titik seperti sekarang ini.

Banyak pihak yang telah berperan dalam penulisan tugas akhir ini. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. K.H. Akhmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika yang telah memberi banyak masukan dan arahan kepada penulis.
5. Bapak Dr. Rado Yendra, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik penulis yang telah memberikan arahan dan banyak memotivasi penulis.
6. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah banyak meluangkan waktunya untuk membimbing penulis dalam penyusunan tugas akhir ini. Tanpa beliau, tugas akhir ini tentu tidak akan dapat terselesaikan tepat waktu.

7. Ibu Sri Basriati, M.Sc. dan Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran demi perbaikan isi tugas akhir ini.
8. Seluruh Dosen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak memberi nasehat, masukan dan saran, bimbingan, serta ilmu yang insyaallah akan bermanfaat bagi penulis untuk meniti karir dan pendidikan penulis selanjutnya.
9. Keluarga tercinta, yang telah memberikan motivasi, dukungan, do'a dan materi yang tak henti-hentinya serta kasih sayang yang tulus kepada penulis.
10. Dua saudariku tercinta, Ade Efi Ferawati dan Richa Febrianti yang begitu banyak memberikan motivasi, kasih sayang dan cinta kepada penulis. Juga kak Dewi Purnama Sari, kakak ipar penulis yang begitu baik dan perhatian juga terus mendukung penulis. Serta saudara/i penulis lainnya yang juga banyak memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
11. Teman satu bimbingan penulis, Dinda Agustina, yang begitu banyak memberikan motivasi dan semangat ketika penulis mulai kehilangan semangat untuk menyelesaikan tugas akhir. Teman yang selalu bersemangat untuk bimbingan. Tanpa Dinda, penulis tidak akan seserius ini untuk menyelesaikan tugas akhir di Semester VII. "*Dinda.. Ajakan kamu untuk bimbingan dan menemui dosen terkait kepengurusan berkas terus terngiang dalam kepalaku.. Terimakasih banyak untuk segalanya. Berkat kamu, aku bisa memaksa diri untuk membuka laptop meski capek setelah selesai kerja atau kegiatan. Berkat kamu juga, aku bisa selesai secepat ini, sesuatu yang sampai sekarang masih sulit aku percayai. Terimakasih..*"
12. Sahabat penulis, Nova Yulinda, Rani Indiarti, dan Ummu Hanisah. "*Kalian bertiga begitu berarti untuk aku. Ketika kepalaku sakit dan stres karena revisi bab IV yang tidak ada habisnya, kalian selalu ada untuk menghibur aku. Berkat kalian, hidup aku terasa lebih ringan dan proses pengerjaan tugas akhir ini jadi tidak seberat sebelumnya. Kalian teman bahagia dan sedihku. Terimakasih banyak atas dukungan dan hiburan di sela-sela stresku. Semoga kalian bisa segera sempro dan menyusul.. Aamiin.*"

13. Genius Lab, teman satu geng di kampus yang terbentuk ketika mengambil Mata Kuliah Demografi, yang telah banyak memberi masukan, ilmu, waktu, kebersamaan dalam belajar, motivasi, dan segalanya. "*Kalian adalah teman-teman yang luar biasa. Akhirnya impian kita di semester II untuk keluar selesaikan studi secara bersamaan bisa kita wujudkan. Sebuah anugerah yang begitu luar biasa bisa dipertemukan dengan kalian. Terimakasih banyak..*"
14. Teman-teman seperjuangan penulis, Matematika B 2016. "*Terimakasih atas waktu berharganya selama perjuangan memperdalam pengetahuan di bidang Matematika dan untuk memperoleh gelar S.Si*."
15. Teman-teman yang turut memberikan motivasi kepada penulis, Rifkhy Muhammad Ishaq dan Muhammad Ikhsan yang selalu bersedia menjadi tempat untuk mencurahkan isi hati penulis. "*Terimakasih udah mau bacakan cerita dan dongeng setelah aku lelah mengerjakan revisian. Berkat kalian, aku bisa banyak tersenyum dan tertawa lagi..*"

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menyadari masih banyak ketidaksempurnaan dan khilaf. Maka dari itu, penulis mengharapkan kritik dan masukan yang membangun dari pembaca. Akhirnya, penulis berharap tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya dari Jurusan Matematika dan kalangan cendekiawan maupun khalayak umum.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Pekanbaru, Desember 2019

Nidia Mindiyarti

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	: Fungsi tingkat persediaan
$P(t)$	: Nilai rata-rata tingkat produksi
$D(t)$	: Nilai tingkat persediaan awal
$v(t)$	: Selisih dari fungsi rata-rata peningkatan dan penurunan
$\hat{I}$	: Tingkat persediaan tujuan
$(a + bt + ct^2)$	: Tingkat permintaan dengan fungsi kuadrat
$\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}$	: Distribusi Weibull
K	: Koefisien biaya produksi
h	: Koefisien biaya penyimpanan
H	: Fungsi Hamilton
L	: Fungsi Lagrange
λ	: Konstanta nonnegatif biaya diskon
m	: Rata-rata fungsi peningkatan
M	: Tingkat persediaan maksimum
$\hat{P}$	: Tingkat produksi tujuan
$H_p = \frac{\partial H}{\partial P}$	: Turunan H terhadap parsial P
$L_I = \frac{\partial L}{\partial I}$	: Turunan L terhadap parsial I
$L_P = \frac{\partial L}{\partial P}$	: Turunan L terhadap parsial P

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persediaan berkaitan dengan penyimpanan bahan baku, bahan setengah jadi, dan barang jadi untuk memastikan lancarnya produksi atau kegiatan bisnis bagi suatu perusahaan atau industri. Teori kendali merupakan teori yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan tingkat persediaan. Salah satu penelitian yang membahas tingkat persediaan dengan judul, "*Pengembangan Sistem Informasi Persediaan Barang Terdistribusi (Studi Kasus: PT Master Centranusa Cemerlang)*" menyebutkan, tingkat persediaan adalah pengendalian yang menentukan tingkat persediaan yang harus dijual, kapan persediaan harus diisi, dan berapa besar pesanan yang harus dilakukan (Wahyu, 2009).

Persediaan dapat menjadi beban bagi keuangan perusahaan karena mengakibatkan dana menganggur lebih besar, resiko kerusakan barang lebih besar, dan biaya penyimpanan lebih besar. Kerusakan barang merupakan hal yang umum terjadi pada sistem persediaan. Barang-barang seperti susu, obat-obatan, komponen elektronik, telur, bensin dan lainnya dikatakan barang yang kualitasnya memburuk (kualitasnya menurun) selama periode penyimpanan normal yang mengakibatkan kerugian. Oleh karena itu, perlu adanya pengendalian terhadap persediaan sehingga persediaan dapat optimal yang dapat dilakukan dengan penerapan teori kendali.

Memperjelas penerapan teori kendali pada persediaan, dapat dilihat dalam penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut, salah satunya yaitu penelitian yang berjudul, "*Kendali Optimal dari Sistem Inventory dengan Peningkatan dan Penurunan Barang*" (Affandi, 2015). Dalam penelitian tersebut dibahas mengenai model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta menyelesaikan bentuk persediaan barang tersebut menggunakan teknik kendali optimal serta peningkatan dan penurunan barang untuk waktu berhingga.

Penelitian lainnya yang berhubungan dengan masalah persediaan barang, dapat dilihat dalam penelitian yang berjudul, *“An Inventory Model for deteriorating items with Weibull Deterioration with Time Dependent Demand and Shortages”* (Sharma, 2013). Dalam penelitian tersebut dijelaskan model matematika dari masalah persediaan yang mengalami kenaikan dan penurunan barang yang mengikuti distribusi Weibull untuk permintaan tergantung pada waktu. Penelitian lainnya yang terangkum dalam skripsi Hazmuzdalifah merubah fungsi selisih kenaikan dan penurunan pada jurnal yang ditulis oleh Affandi (2015) dengan distribusi Weibull yang ada pada jurnal Sharma (2013). Selanjutnya, penelitian yang membahas tentang, ”Analisis Model EOQ dengan adanya Kerusakan Barang pada Persediaan dan Perubahan Tingkat Permintaan” telah dibahas oleh Azizah (2018) tentang model serta cara menentukan biaya total serta meminimalkan biaya persediaan dan menentukan parameter yang berpengaruh dalam solusi persediaan dari adanya kerusakan dan tingkat permintaan yang berbeda. Dalam penelitiannya dijelaskan mengenai kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan yang diasumsikan dengan fungsi kuadrat, dimana kerusakan yang terjadi sangat kecil dan konstan.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk menggabungkan penelitian dari skripsi Hazmuzdalifah dengan mengubah fungsi kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan sesuai penelitian Azizah (2018), yaitu dengan menggantinya ke bentuk fungsi kuadrat pada model persediaan barang yang mengalami penurunan untuk waktu berhingga. Sehingga penulis mengambil judul **“Kendali Optimal pada Model Persediaan Barang yang Mengalami *Weibull Deterioration* pada Waktu Berhingga**”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan tingkat persediaan barang yang optimal untuk model kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga?

2. Bagaimana analisis kestabilan bentuk model kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan dinamik yang digunakan adalah persamaan differensial orde 1.
2. Fungsi tujuan berbentuk kuadratik untuk waktu berhingga.
3. Distribusi Weibull dengan dua parameter.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan persamaan tingkat persediaan barang yang optimal pada model kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga.
2. Mendapatkan kestabilan model matematika dari kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai wawasan dan ilmu pengetahuan untuk menambah pengetahuan tentang sistem kendali.
2. Memberi konstribusi bagi pembaca untuk membantu mempelajari dan memperdalam masalah kestabilan tentang kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga.
3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.
4. Untuk mengetahui bagaimana bentuk kendali optimal dari sistem persediaan yang mengalami kerusakan barang pada persediaan dengan *Weibull deterioration* untuk waktu berhingga.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori menjelaskan tentang dasar teori yang mendukung untuk mengembangkan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini membahas tentang langkah-langkah dalam penelitian.

BAB IV Pembahasan

Bab ini membahas tentang bagaimana caranya untuk mendapatkan hasil dari penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Bab ini membahas tentang kesimpulan dan saran dari penelitian.

BAB II
LANDASAN TEORI

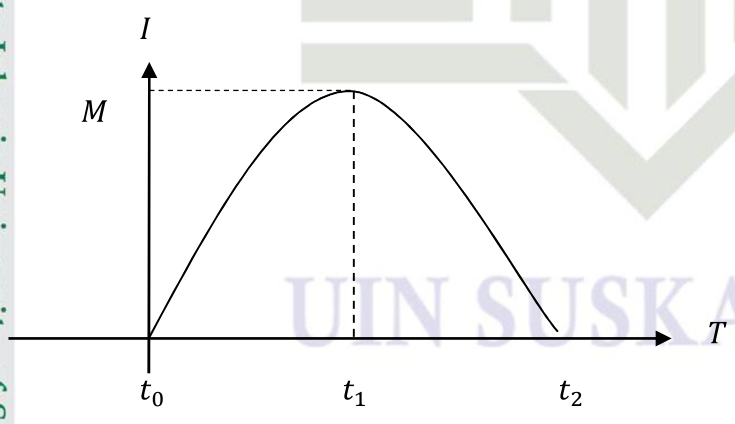
Pada bab ini, akan diuraikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang akan digunakan sebagai landasan pembahasan untuk bab III. Materi yang akan diuraikan antara lain, model persediaan barang, persamaan diferensial biasa orde satu, persamaan diferensial biasa nonhomogen koefisien konstanta, bentuk kuadratik, dan kestabilan.

2.1 Model Persediaan Barang

Berdasarkan hasil penelitian Affandi (2015), Azizah (2018) dan Sharma (2013), didapat model persediaan barang yang akan dijabarkan di bawah ini.

2.1.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang

Pembentukan model ini didasarkan pada sistem persediaan dimana ditinjau persediaan saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Diasumsikan bahwa fase pertama dari t_0 hingga t_1 untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1 hingga t_2 untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan yang mengalami fase perubahan inventori.



Gambar 2.1 Model Persediaan dengan Perubahan Fase (Affandi, 2015)

Gambar 2.1 di atas membahas dua kasus, yaitu kasus model penurunan barang dan model kenaikan barang. Kedua kasus tersebut dapat didefinisikan dalam persamaan differensial dinamik, yaitu:

$$\dot{I} = \begin{cases} P(t) + v(t)I(t), & t \in [0, t_1] \\ P(t) - D(t) + v(t)I(t), & t \in [t_1, t_2] \end{cases} .$$

Dalam penelitian ini, hanya akan dibahas persoalan untuk kasus penurunan barang. Kasus penurunan barang dapat didefinisikan dengan persamaan differensial dinamik (Affandi, 2015), yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{2.1}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$, $P(t) \geq 0$. Kemudian, untuk menjamin tingkat persediaan menurun dari t_1 hingga t_2, lebih lanjut Persamaan (2.1) memenuhi:

$$P(t) - D(t) + v(t)I(t) > 0 \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{2.2}$$

dengan

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan.

$P(t)$: tingkat fungsi produksi.

$D(t)$: fungsi permintaan.

I_0 : tingkat nilai awal persediaan.

$m(t)$: rata-rata fungsi kenaikan.

$\theta(t)$: rata-rata fungsi kemerosotan.

v(t) : selisih dan rata-rata fungsi kenaikan dan penurunan

Dari Persamaan (2.2) di atas, akan dicari fungsi tujuan. Fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan adalah sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{ \square\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right\} dt \tag{2.3}$$

dengan

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

$\square$: koefisien biaya penyimpanan

K : koefisien biaya produksi

Selanjutnya, untuk mencari tingkat produksi yang optimal, persamaan diferensial dinamik yang ada diubah ke bentuk persamaan Hamilton (Afffandi, 2015). Selanjutnya, didefinisikan persamaan Hamilton sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2}\left[\square\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda g, \tag{2.4}$$

dengan

$$g = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.5}$$

dan fungsi Lagrange adalah sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}\left[\square\left(I - \hat{I}\right)^2 + K(P - \hat{P})^2\right] + (\lambda - \mu)g, \;\; t \in [t_1, t_2] \tag{2.6}$$

Syarat yang diperlukan untuk kondisi optimal, diberikan dengan:

$$Hp = 0 \tag{2.7}$$

$$L_I = -\dot{\lambda} \tag{2.8}$$

$$L_p = 0 \tag{2.9}$$

$$\mu \geq 0\,, \mu g \geq 0 \tag{2.10}$$

2.1.2 Model Persediaan dengan Fungsi Kuadrat

Terdapat tiga jenis permintaan dalam model persediaan, yaitu tingkat permintaan dengan bentuk fungsi konstan, tingkat permintaan dengan fungsi linier dan tingkat permintaan dengan fungsi kuadrat. Dalam penelitian Azizah (2018), telah dianalisa model persediaan dengan adanya kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah persediaan yang dipengaruhi oleh banyak sedikitnya barang yang rusak. Dengan analisis sensitivitas disimpulkan bahwa jika tingkat permintaan fungsi konstan maka biaya total persediaan yang dibayarkan kecil tetapi waktu total satu siklus persediaan lama, sedangkan tingkat permintaan dengan fungsi linier dan fungsi kuadratik menghasilkan biaya total persediaan yang dibayarkan menjadi besar namun waktu satu siklus persediaan cepat.

Lebih jauh dijelaskan, ketika kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan dengan tingkat permintaan diasumsikan dengan bentuk fungsi kuadrat, kerusakan yang terjadi menjadi sangat kecil dan konstan. Fungsi kuadrat yang digunakan dalam asumsi tingkat permintaan pada model persediaan pada penelitian ini didefinisikan (Begum, 2010) sebagai berikut:

$$D(t) = a + bt + ct^2 \tag{2.11}$$

2.1.3 Model Persediaan dengan Distribusi Weibull

Tingkat penurunan pada model persediaan dapat mengikuti distribusi Weibull dengan dua parameter seperti dijelaskan dalam penelitian Sharma (2013). Distribusi Weibull dua parameter didefinisikan sebagai berikut:

$$\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}} \tag{2.12}$$

Dimana $0 < \alpha < 1$ adalah skala parameter dan $\beta > 0$ adalah bentuk parameter.

Berdasarkan distribusi Weibull pada Persamaan (2.12), tingkat persediaan dengan distribusi Weibull didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\, I(t) = -bt \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{2.13}$$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independen disebut persamaan diferensial. Selanjutnya, persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu variabel independen disebut persamaan diferensial biasa (Ross, 1984).

Persamaan diferensial biasa orde satu adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde satu. Secara umum dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.14}$$

Dengan $f(x,y)$ adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan dan kontinu di x dan y. Dalam buku Xie (2010) disebutkan, apabila fungsi f dalam Persamaan (2.14) berbentuk linier pada variabel bebas y, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.15}$$

Dengan P dan Q fungsi x. Solusi Persamaan (2.15) dicari dengan rumusan sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Contoh 2.1:

Selesaikan Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} - 2y = x$

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan $\frac{dy}{dx} - 2y = x$ diperoleh $P(x) = -2$ dan $Q(x) = x$ sehingga penyelesaiannya adalah:

$$\int P(x)dx = \int -2dx = -2x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{2x}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-2x}dx = \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{2x}\left[\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right]$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{2x}$$

2.3 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa nonhomogen diberikan sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.16}$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa nonhomogen merupakan hasil penjumlahan dari penyelesaian persamaan homogen dan persamaan karakteristik (partikular) (Johannes, 1994). Misalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen,

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.17}$$

Persamaan (2.17) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga diperoleh:

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Diperoleh $e^{rx} = 0$, maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.17) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan karasteriktik:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.18}$$

Adapun penyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.18) diperoleh dari persamaan bujur sangkar sebagai berikut:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{a^2-4c}}{2a}$$

Penyelesaian persamaan karakteristik pada Persamaan (2.18) bergantung pada nilai diskriminan. Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagai berikut:

a. Akar-akar Real dan Berbeda ($b^2 - 4ac > 0$)

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.17) adalah:

   $$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_1e^{r_2x} \tag{2.19}$$

   Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

b. Akar-akar Berulang ($b^2 - 4ac = 0$)

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah sama ($r_1 = r_2$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.17) adalah:

   $$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_1e^{r_2x} \tag{2.20}$$

   Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

c. Akar-akar Imajiner ($b^2 - 4ac < 0$)

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta \; dan \; r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.17) adalah:

   $$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \tag{2.21}$$

   Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Penyelesaian persamaan karakteristik (partikular) untuk persamaan nonhomogen disimbolkan dengan $y_p(x)$. Maka, penyelesaian umum dari Persamaan nonhomogen (2.16) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.22}$$

Contoh 2.2:

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

Selanjutnya, dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogennya, yaitu:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r - 2)(r - 1) = 0$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2$$

Diperoleh penyelesaiannya, yaitu:

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

Selanjutnya, untuk penyelesaian persamaan karakteristik $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

Sehingga,

$$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x \text{ dan } y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka disubsitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$ sehingga diperoleh:

$$(-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan di atas, maka diperoleh nilai $A = \frac{1}{10}$ dan $B = -\frac{3}{10}$, sehingga persamaan karakteristiknya:

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

Jadi, diperoleh penyelesaian umum untuk persoalan di atas dengan menjumlahkan persamaan homogen $y_c(x)$ dan persamaan karakteristik $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

2.4 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini diberikan bentuk kuadratik, yaitu:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{2.23}$$

dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j. Kemudian untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots x_n]$, maka Persamaan (2.23) dapat diuraikan menjadi:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \dots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \dots x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \epsilon$ ▯. Dalam buku Lewis (1995) dijelaskan, sifat definit dari Persamaan (2.23) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran n x n dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua *i*
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.
5. Undefinit jika tidak memenuhi sifat di atas.

Untuk memahami penjelasan di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Bentuklah persamaan $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -9x_ix_j$ ke dalam bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Persamaan yang telah diberikan diselesaikan ke dalam bentuk kuadratik:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -9x_i x_j &= -9x_1x_1 - 9x_1x_2 - 9x_2x_1 - 9x_2x_2\\ &= -9{x_1}^2 - 9x_1x_2 - 9x_2x_1 - 9{x_2}^2\\ &= -9{x_1}^2 - 18x_1x_2 - 9{x_2}^2\\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -9\\ -9 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk sifat definit diperoleh penyelesaiannya sebagai berikut:

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -9 & -9\\ -9 & -9\end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 & -9\\ -9 & -9\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} (\lambda + 9) & 9\\ 9 & (\lambda + 9)\end{bmatrix} = 0$$

$$\big((\lambda + 9)\,(\lambda + 9)\big) - (9\,.\,9) = 0$$

$$\lambda^2 + 18\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -18$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas memiliki sifat semi definit negatif.

2.5 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $x(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium (Olsder, 1994).

Untuk memahami definisi di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:: $\dot{\boldsymbol{x}} = 2x$

Penyelesaian:

Diketahui: $\dot{\boldsymbol{x}} = 2x$

Maka, diperoleh titik ekuilibriumnya: $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.5.2 Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil (Olsder, 1994).

Untuk memahami definisi di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.5:

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial berikut $\dot{x} = -2x$ dengan diperoleh titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$.

Penyelesaian:

Sebelum dianalisa kestabilan, diberikan solusi sebagai berikut:

$$\dot{x} = -2x$$
$$\frac{dx}{dt} = -2x$$
$$\frac{dx}{x} = -2dt$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int -2dt$$
$$\ln x = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga:

$$\ln x - c = -2t$$
$$\ln x - \ln x_0 = -2t$$
$$\ln \frac{x}{x_0} = -2t$$
$$\frac{x}{x_0} = e^{-2t}$$
$$x = x_0 e^{-2t}$$

Contoh 2.6:

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$\dot{x}_1 = -x_1$ dan $\dot{x}_2 = -5x_2$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu:

untuk $\dot{x}_1 = -x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -dt$$

$$\ln x_1 = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh:

$$\ln x_1 - c = -t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-t}$$

$$x_1 = x_0 e^{-t}$$

Berikutnya solusi untuk $x_2 = -5x_2$:

$$\frac{dx_2}{dt} = -5x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -5dt$$

$$\ln x_2 = -5t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh:

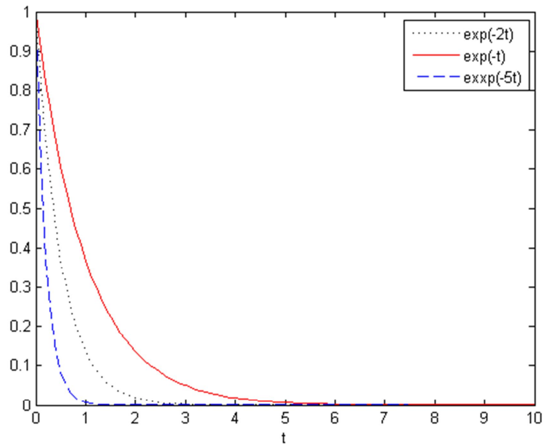
$$\ln x_2 - c = -5t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -5t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-5t}$$

$$x_2 = x_0 e^{-5t}$$

Selanjutnya, untuk melihat kecenderungan e^{-2t}, e^{-t}, dan e^{-5t} dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik Fungsi $f(t) = e^{-2t}$, $f(t) = e^{-t}$, dan $f(t) = e^{-5t}$

Berdasarkan Gambar 2.2 jika $t \to 10$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -2x$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 0. Selain itu, untuk $f(t) = e^{-t}$, jika $t \to 10$ maka $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{x_1}$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 0. Selanjutnya, untuk $f(t) = e^{-5t}$, jika $t \to 10$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa x_2 stabil asimtotik karena solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas penyelesaian sistem kendali optimal dengan penurunan barang. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui persamaan diferensial dinamik untuk penurunan barang sebagai berikut:

   $$\dot{I} = P(t) - (a + bt + ct^2) + \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}\ I(t) \qquad t \in [t_1, t_2]$$

   Kemudian berdasarkan Persamaan (2.14) diketahui fungsi tujuan untuk kasus penurunan barang pada waktu berhingga adalah sebagai berikut:

   $$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{ \square\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right\} dt$$

2. Dari persamaan diferensial dinamik untuk kasus penurunan barang dan fungsi tujuan untuk kasus penurunan barang pada waktu berhingga yang telah diketahui, diperoleh Persamaan Hamilton (2.15) dan Fungsi Lagrange (2.17).
3. Setelah diperoleh persamaan Hamilton dan fungsi Lagrange, dicari syarat-syarat kondisi optimal, yaitu ditentukan $H_P = 0$ (2.18), $L_I = -\dot{\lambda}$ (2.19) dan $L_p = 0$ (2.20).
4. Dari pengerjaan syarat-syarat kondisi optimal, diperoleh nilai tingkat produksi $P(t)$. Selanjutnya, nilai $P(t)$ yang telah diperoleh disubstitusi ke persamaan diferensial dinamik untuk kasus penurunan barang $(\dot{I})$ pada langkah nomor 1.
5. Selanjutnya, untuk memperoleh fungsi persediaan barang yang optimal, persamaan diferensial dinamik untuk kasus penurunan barang yang telah diperoleh $(\dot{I})$ diturunkan terhadap kondisi waktu yang ditetapkan $(\frac{d}{dt}(\dot{I}))$.
6. Untuk menentukan persamaan tingkat persediaan yang optimal $(I(t))$, persamaan tingkat fungsi produksi yang optimal $(D(t))$, dan fungsi penurunan barang $\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}(\mathrm{t})$ harus diperoleh solusi dari persamaan yang telah didapatkan pada langkah nomor 5 dengan mengamati dua kasus dalam bentuk solusi eksplisit, yaitu kasus dimana fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}(\mathrm{t})$ adalah fungsi

konstanta dan fungsi $\frac{h}{k} + (\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}(\mathrm{t})\right) + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}(\mathrm{t})$ adalah konstanta.

7. Dari langkah nomor 6, diperoleh solusi konstanta, yaitu untuk nilai C_1 dan C_2 dan juga nilai Q_t yang digunakan untuk menentukan kestabilan, dimana persamaan akan stabil asimtotik untuk waktu t jika menuju kesatu nilai.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan persamaan diferensial sistem dinamik untuk kasus penurunan barang dengan fungsi permintaan berupa fungsi kuadrat dan dengan *Weibull Deterioration* pada waktu berhingga, diperoleh persamaannya sebagai berikut.

$$I = P(t) - D(t) + v(t)I(t), \qquad t \in [t_1, t_2]$$

Dengan fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan sebagai berikut.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{h\left[I - \hat{I}\right]^2 + K\left[P - \hat{P}\right]^2\right\}dt$$

Selanjutnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Persamaan tingkat persediaan barang yang optimal pada model kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull Deterioration* untuk waktu berhingga, yaitu:

   a. Untuk kasus pertama, fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^c}$ adalah konstan, diperoleh tingkat persediaan barang yang optimal sebagai berikut:

   $$I(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + Q(t)$$

   Dengan

   $$Q(t) = \frac{\frac{h}{K} + W_b\left(a - b - ct^2 + P - 2\hat{P} + \frac{\lambda}{K}\right) + b + 2t}{\left(\frac{h}{K} + W_b{}^2\right)}$$

Selanjutnya, dari kasus pertama dimana fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^c}$ adalah konstan, diperoleh tingkat produksi barang yang optimal sebagai berikut:

$$P(t) = \hat{P} - \left(c_1(W_b - r)e^{rt} + c_2(W_b + r)e^{-rt} - Q(t) + P - (a + bt + ct^2) + W_b Q(t)\right)$$

b. Untuk kasus kedua, fungsi $\frac{h}{K} + \left(\frac{d}{dt}(W_b)\right) + (W_b)^2$ adalah konstan, diperoleh tingkat persediaan barang yang optimal sebagai berikut:

$$I(t) = (c_1 + W_{b1})e^{k_1 t} + (c_2 + W_{b2})e^{-k_2 t} + \frac{h}{Kk_1^2}\hat{I}$$

Dengan tingkat produksi barang yang optimal sebagai berikut:

$$P(t) = \hat{P} - \left(\begin{array}{l}(W_b - k_1)(c_1 + W_{b1})e^{k_1 t} + (W_b + k_1)(c_2 + W_{b2})e^{-k_1 t} - \frac{d}{dt}(W_{b1})e^{k_1 t} \\ -\frac{d}{dt}(W_{b2})e^{-k_1 t} + P - (a + bt + ct^2) + \frac{W_b h I}{Kk_1^{\,2}}\end{array}\right)$$

2. Kestabilan model Matematika dari kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Weibull Deterioration* untuk waktu berhingga, yaitu:
   a. Untuk kasus pertama, fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^c}$ adalah konstan, diperoleh nilai konstanta c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{(W_b + r)e^{-rt_2}(M - Q(t_1)) - e^{-rt_1}\left(Q(t_2) - \hat{P} + (a + bt + ct^2) - W_b Q(t_2)\right)}{(e^{rt_1})\left((W_b + r)e^{-rt_2}\right) - (e^{-rt_1})\left((W_b - r)e^{rt_2}\right)}$$

dan

$$c_2 = \frac{-(W_b - r)e^{rt_2}(M - Q(t_1)) + e^{rt_1}\left(Q(t_2) - \hat{P} + (a + bt + ct^2) - W_b Q(t_2)\right)}{(e^{rt_1})\left((W_b + r)e^{-rt_2}\right) - (e^{-rt_1})\left((W_b - r)e^{rt_2}\right)}$$

Kemudian, dari hasil konstanta c_1 dan c_2 dapat dianalisis kestabilan untuk $t \in [t_1, t_2]$ dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh ke persamaan

$$I(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{\frac{h}{K} + W_b\left(a - b - ct^2 + P - 2\hat{P} + \frac{\lambda}{K}\right) + b + 2t}{\left(\frac{h}{K} + W_b^{\,2}\right)}$$ sehingga

diperoleh kestabilan untuk $t \to t_2$ jika persamaan tingkat persediaan barang yang optimal $I(t)$ menuju kesatu nilai.

b. Untuk kasus kedua, fungsi $\frac{h}{K} + \left(\frac{d}{dt}(W_b)\right) + (W_b)^2$ adalah konstan, diperoleh nilai konstanta c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{\left((W_b + k_1)e^{-k_1 t_2}\right)\left(M - \left(W_{b1}e^{k_1 t_1} + W_{b2}e^{-k_1 t_1} + \frac{hI}{Kk_1^{\,2}}\right)\right) + \left(e^{-k_1 t_1}\right)\left(\begin{array}{l}(W_b - k_1)W_{b1}e^{k_1 t_2} + (W_b + k_1)W_{b2}e^{-k_1 t_2} - \frac{d}{dt}(W_{b1})e^{k_1 t_2} \\ - \frac{d}{dt}(W_{b2})e^{-k_1 t_2} + P - (a + bt + ct^2) + \frac{W_b hI}{Kk_1^{\,2}}\end{array}\right)}{\left(e^{k_1 t_1}\right)\left((W_b + k_1)e^{-k_1 t_2}\right) - \left(e^{-k_1 t_1}\right)\left((W_b - k_1)e^{k_1 t_2}\right)}$$

dan

$$c_2 = \frac{\left(-(W_b - k_1)e^{k_1 t_2}\right)\left(M - \left(W_{b1}e^{k_1 t_1} + W_{b2}e^{-k_1 t_1} + \frac{hI}{Kk_1^{\,2}}\right)\right) - \left(e^{k_1 t_1}\right)\left(\begin{array}{l}(W_b - k_1)W_{b1}e^{k_1 t_2} + (W_b + k_1)W_{b2}e^{-k_1 t_2} - \frac{d}{dt}(W_{b1})e^{k_1 t_2} \\ - \frac{d}{dt}(W_{b2})e^{-k_1 t_2} + P - (a + bt + ct^2) + \frac{W_b hI}{Kk_1^{\,2}}\end{array}\right)}{\left(e^{k_1 t_1}\right)\left((W_b + k_1)e^{-k_1 t_2}\right) - \left(e^{-k_1 t_1}\right)\left((W_b - k_1)e^{k_1 t_2}\right)}$$

Kemudian, dapat dianalisis kestabilan untuk $t \in [t_1, t_2]$ dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh ke persamaan $I(t) = (c_1 + W_{b1})e^{k_1 t} + (c_2 + W_{b2})e^{-k_1 t} + \frac{hI}{Kk_1^{\,2}}$ sehingga diperoleh kestabilan untuk $t \to t_2$ jika persamaan tingkat persediaan barang yang optimal $I(t)$ menuju kesatu nilai.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan penelitian, maka penulis merekomendasikan beberapa saran sebagai berikut:

a. Dilakukan penelitian lanjutan mengenai kasus kenaikan barang dengan fungsi permintaan dan fungsi kerusakan yang sama.
b. Dilakukan penelitian lanjutan mengenai kasus kenaikan dan penurunan barang untuk fungsi permintaan dengan fungsi linier dan fungsi kerusakan yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi, Pardi, Faisal, dan Y. Yulida. 2015. "Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". *Jurnal MIPA 38 (1) (2015):79-88. Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lambung Mangkurat.*

Azizah, Nur. 2018. "Analisis Model EOQ dengan Adanya Kerusakan Barang pada Persediaan dan Perubahan Tingkat Permintaan". *Jurnal Matriks, Volume 1, No. 1.*

Begum, R. 2010. "An EOQ Model for Deteriorating Items with Weibull Distribution Deterioration, Unit Production Cost with Quadratic Demand and Shortages". *Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, no. 6, 271 – 288.*

Hazmuzalipa. 2018. "Kendali Optimal pada Model Persediaan Barang yang Mengalami Weibull Deterioration pada Waktu Berhingga". *Skripsi: Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.*

Johannes, Prof. H. dan Budiono Sri Handoko. 1994. "*Pengantar Matematika untuk Ekonomi*". Jakarta: LP3ES.

Lewis, F. L. 1995. "*Optimal Control*". Toronto : John Wiley & Sons, Inc.

Olsder, GJ. 1994. "*Mathematical System Theory*". Delft: University of Technology, Delft.

Pulungan, Dian Serena dan Erika Fatma. 2018. "Analisis Pengendalian Persediaan Menggunakan Metode Probabilistaik dengan Kebijakan Backorder dan Lost Sales". *Jurnal Teknik Industri, Vol.19, No.1, Februari 2018, pp. 34-38.*

Ross, Shepley L. 1984. "*Differential Equations, Third Edition*". New York: University of New Hampshire.

Sharma, Vikas, dkk. 2013. "An Inventory Model for Deteriorating Items with Weibull Deterioration with Time Dependent Demand and Shortages". *Research Jurnal of Management Sciences, Vol. 2(3), 1-4, March (2013).*

Tadj, Lotfi, dkk. 2008. "Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items". *Applied Sciences, Vol. 10, Halaman 243-255.*

Wahyu, Widodo Kurniawan. 2009. "Pengembangan Sistem Informasi Persediaan Barang Terdistribusi (Studi Kasus:PT Master Centranusa Cemerlang)". *Skripsi: UIN Syarif Hidayatullah Jakarta.*

Xie, Wei-Chau. 2010. "*Differential Equations for Engineers*". New York: University of Waterloo Cambridge.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Nidia Mindiyarti, dilahirkan di Desa Tri Manunggal pada hari Minggu, 20 Juli 1997. Anak keempat dari empat bersaudara pasangan Amin dan Karsini. Penulis menyelesaikan pendidikan di Taman Kanak-Kanak Nusa Indah pada tahun 2002, dilanjutkan ke pendidikan Sekolah Dasar di Madrasah Ibtidaiyah Mathlabul Ulum pada tahun yang sama dan selesai pada tahun 2009. Pada tahun itu juga, penulis melanjutkan pendidikan ke Madrasah Tsanawiyah Mathlabul Ulum dan tamat pada tahun 2012. Kemudian, penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Tapung pada tahun 2012 dan selesai pada tahun 2015. Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan di Jurusan Arsitektur, Fakultas Teknik, Universitas Riau. Kemudian di tahun berikutnya, penulis mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Dalam masa studi, penulis bersama dua orang lainnya melakukan penelitian mengenai "Metode Prediksi Fertilitas Menggunakan Regresi, Rough Sets, dan Rough Sets-Regresi" yang dipresentasikan dalam Seminar Nasional Teknologi Informasi, Teknologi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 10, Pekanbaru, 13 November 2018. Penulis juga menjadi bagian dalam penulisan buku, "Seutas Kata untuk Sejuta Rasa" yang diterbitkan oleh Komunitas Lentera Kata. Di penghujung 2019, penulis berhasil menyelesaikan kuliah strata satu (S1) dan memperoleh gelar Sarjana Sains.